

Степень вхождения двойки

1. Докажите, что при любом чётном n показатель чётности числа C_n^2 меньше показателя чётности числа n .
2. Из чисел от 1 до $2n$ выбрано $n + 1$ число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, одно из которых делится на другое.
3. Даны три попарно различных натуральных числа a, b, c . Докажите, что число $(a + b)(b + c)(c + a)$ не может быть степенью двойки.
4. Петя нашёл сумму всех нечётных делителей некоторого чётного числа, а Вася — сумму всех чётных делителей этого числа. Может ли произведение этих двух чисел быть точным квадратом?
5. Может ли число $n!$ делиться на 2^n ?
6. Петя выбрал несколько последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел являться степенью двойки?
7. Докажите неравенство $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1000} > 5$
8. Можно ли так подобрать три натуральных числа, чтобы их сумма квадратов была равна их удвоенному произведению?
9. Докажите, что число $1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots + 1/n$ не может быть целым.
10. Докажите, что в любом многоугольнике можно выбрать две стороны так, что их длины либо равны, либо отношение большей длины к меньшей меньше двух.
11. Может ли сумма ста последовательных степеней двойки, начиная с некоторой, быть равна сумме нескольких последовательных натуральных чисел, начиная с 1?