

## Про многочлены

1. (а) Докажите, что многочлен степени  $n$  имеет не более  $n$  различных корней.  
(б) Докажите, что если два многочлена степени не выше  $n$  совпадают в  $n + 1$  точке, то они равны.

2. Докажите, что значение выражения не зависит от  $x$

$$\frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)} + \frac{(x-a)(x-b)(x-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{(x-a)(x-c)(x-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}.$$

3. Леша выписал на доске 100 различных чисел. Затем он увеличил все числа на один. Оказалось, что произведение чисел не изменилось. Затем он повторил операцию, и произведение чисел снова не изменилось. Какое наибольшее количество раз он мог повторить эту операцию, чтобы произведение чисел оставалось постоянным?
4. Про многочлен  $f(x) = x^{10} + a_9x^9 + \dots + a_0$  известно, что  $f(1) = f(-1), \dots, f(5) = f(-5)$ . Докажите, что  $f(x) = f(-x)$  для любого действительного  $x$ .
5. Многочлен  $P$  седьмой степени с целыми коэффициентами в семи целых точках принимает значения  $\pm 1$ . Докажите, что многочлен  $P$  неприводим над  $Z$ , иными словами не существует многочленов  $Q_1$  и  $Q_2$  ненулевой степени с целыми коэффициентами таких, что  $P = Q_1Q_2$ .
6. Даны два многочлена положительной степени  $P(x)$  и  $Q(x)$ , причём выполнены тождества  $P(P(x)) \equiv Q(Q(x))$  и  $P(P(P(x))) \equiv Q(Q(Q(x)))$ . Обязательно ли тогда выполнено тождество  $P(x) \equiv Q(x)$ ?
7. Найдите все многочлены  $p(x)$ , такие, что для любых ненулевых чисел  $x, y, z$ , удовлетворяющих условию  $xz + yz = xy$ , имеет место равенство:  $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p(y)} = \frac{1}{p(z)}$ .
8. Множество из 2018 подряд идущих натуральных чисел назовем *прекрасным*, если его можно разбить на два подмножества с равными произведениями. Докажите, что прекрасных множеств конечно.