Вектора и скалярное произведение. Продолжение.

1. В треугольнике ABC проведена биссектриса AP и внешняя биссектриса AQ. Пусть $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{c}$.

(a) Выразите через $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ вектор $\overrightarrow{AP}$;

(b) Выразите через $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{c}$ вектор $\overrightarrow{AQ}$;

(c) Используя скалярное произведение, докажите, что $AP \perp AQ$.

2. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BP и CT, а также внешняя биссектриса AQ. Используя вектора, докажите, что P, Q, T лежат на одной прямой.

3. В треугольнике ABC известно, что AA_1 — медиана, AA_2 — биссектриса, K — такая точка на AA_1, для которой $KA_2 \parallel AC$. Докажите, что $AA_2 \perp KC$.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = AD$ и $\angle ABC = \angle ADC = 90°$. На сторонах BC и CD выбраны соответственно точки F и E так, что $DF \perp AE$. Докажите, что $AF \perp BE$.

5. О вписанном четырехугольнике $ABCD$ известно, что $AB > CD$ и $BC > AD$. На сторонах AB и BC отмечены точки X и Y соответственно так, что $AX = CD$ и $AD = CY$. Пусть M — середина XY. Докажите, что угол AMC прямой.

6. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. H — точка пересечения высот. На сторонах AB и BC выбраны точки M и K и соответственно так, что $\angle KMH = 90°$. Докажите, что из отрезков AK, CM и MK можно сложить прямоугольный треугольник.

7. Пусть ABC — равнобедренный треугольник ($AB = AC$). На продолжениях сторон BC, AB и AC выбраны точки P, X, Y таким образом, что $PX \parallel AC$ и $PY \parallel AB$ и точка P лежит на луче CB. Точка T — середина дуги BC описанной окружности треугольника ABC ($T \neq A$). Докажите, что $PT \perp XY$.