Вектора и скалярное произведение

Примеры

1. Найдите угол между диагоналями AD и BF в правильном шестиугольнике $ABCDEF$.

2. Найдите угол, лежащий против основания равнобедренного треугольника, если медианы, проведенные к боковым сторонам, взаимно перпендикулярны.

Задачи

1. **(a)** Пусть A, B, C и D — произвольные точки плоскости. Докажите, что $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.
(b) Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.
(c) Известно, что в тетраэдре две пары скрещивающихся ребер перпендикулярны. Докажите, что и третья пара скрещивающихся ребер обладает этим свойством.

2. **(a)** Докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки плоскости до двух противоположных вершин прямоугольника равна сумме квадратов расстояний от этой точки до двух других вершин прямоугольника.
(b) Дан прямоугольник $ABCD$ и точка P. Докажите, что $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PD}$.
(c) Дан прямоугольник $ABCD$ и точка P. Прямые, проходящие через A и B и перпендикулярные, соответственно, PC и PD, пересекаются в точке Q. Докажите, что $PQ \perp AB$.

3. Пусть O — центр описанной окружности, H — ортоцентр и M — точка пересечения медиан треугольника ABC.
(a) Докажите, что $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.
(b) Выведите из этого, что точки M, H, O лежат на одной прямой (прямая Эйлера), причем $MH = 2 \cdot OM$.
(c) Докажите, что $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$.

4. Четырёхугольник $ABCD$ вписанный. Пусть H_a — ортоцентр треугольника BCD, а M_a — середина отрезка AH_a. Аналогично определим M_b, M_c и M_d. Докажите, что M_a, M_b, M_c и M_d совпадают.

5. Пусть O — центр окружности, описанной около равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$), D — середина стороны AB, а E — точка пересечения медиан треугольника ACD. Докажите, что $OE \perp CD$.