

Классическая комбинаторика

1. Докажите алгебраически следующие тождества:

(а) $k \cdot C_n^k = n \cdot C_{n-1}^{k-1}$;

(б) $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$;

(с) $C_m^k \cdot C_n^m = C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k}$.

2. Докажите комбинаторно следующие тождества:

(а) $k \cdot C_n^k = n \cdot C_{n-1}^{k-1}$;

(б) $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$;

(с) $C_m^k \cdot C_n^m = C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k}$.

3. Чему равно $C_k^k + C_{k+1}^k + \dots + C_n^k$?

4. **Свёртка Вандермонда.** Докажите комбинаторно тождество:

$$C_{r+s}^n = C_r^0 \cdot C_s^n + C_r^1 \cdot C_s^{n-1} + \dots + C_r^r \cdot C_s^{n-r}.$$

5. Чему равно $C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \dots$?

6. Вычислите суммы:

(а) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots$

(б) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \dots$

(с) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + (C_n^3)^2 + \dots$

(д) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + 4C_n^4 + \dots$

(е) $C_n^1 + 2^2 C_n^2 + 3^2 C_n^3 + 4^2 C_n^4 + \dots$