

Многочлены

простые

1. Приведите пример многочлена степени 2001, для которого выполняется тождество $P(x) + P(1 - x) = 1$.
2. Пусть $P(x)$ — многочлен степени 2011. Докажите, что уравнение $P(P(x)) = 0$ имеет не меньше корней, чем $P(x) = 0$.
3. Найдите все многочлены $P(x)$ такие, что $xP(x - 1) = (x - 26)P(x)$
4. Постройте такую гладкую кривую в пространстве, чтобы она пересекалась с любой плоскостью.

не очень

5. Известно, что многочлен $x^4 + ax^3 + 2x^2 + bx + 1$ имеет действительный корень. Докажите, что $a^2 + b^2 \geq 8$.
6. Многочлен $P(x)$ степени n имеет n различных действительных корней. Какое наибольшее число его коэффициентов может равняться нулю?
7. Многочлен $P(x)$ таков, что $P(x) > 0$ при $x > 0$. Докажите, что существуют многочлены $Q(x)$ и $R(x)$ с неотрицательными коэффициентами такие, что $P(x) = Q(x)/R(x)$.
8. Пусть $P(x) = (x - a)^k Q(x)$, где $a \neq 0$ и $Q(x)$ — многочлен, не являющийся тождественным нулем. Докажите, что у $P(x)$ по крайней мере $k + 1$ ненулевой коэффициент.