

## Цветные конструкции

1. При каком наибольшем  $n$  можно раскрасить числа  $1, 2, \dots, 14$  в красный и синий цвета так, чтобы для каждого числа  $k = 1, 2, \dots, n$  нашлись пара синих чисел, разность между которыми равна  $k$ , и пара красных чисел, разность между которыми тоже равна  $k$ ?
2. Все натуральные числа, большие единицы, раскрасили в два цвета — синий и красный — так, что сумма каждых двух синих (в том числе одинаковых) — синяя, а произведение каждых двух красных (в том числе одинаковых) — красное. Известно, что при раскрашивании были использованы оба цвета и что число 1024 покрасили в синий цвет. Какого цвета при этом могло оказаться число 2018?
3. Каждая клетка таблицы  $7 \times 8$  (7 строк и 8 столбцов) покрашена в один из трех цветов: красный, желтый или зеленый. При этом в каждой строке красных клеток не меньше, чем желтых и не меньше, чем зеленых, а в каждом столбце желтых клеток не меньше, чем красных и не меньше, чем зеленых. Сколько зеленых клеток может быть в такой таблице?
4. Каждая целочисленная точка плоскости окрашена в один из трех цветов, причем все три цвета присутствуют. Докажите, что найдется прямоугольный треугольник с вершинами трех разных цветов.
5. В кабинете президента стоят 2018 телефонов, любые два из которых соединены проводом одного из четырех цветов. Известно, что провода всех четырех цветов присутствуют. Всегда ли можно выбрать несколько телефонов так, чтобы среди соединяющих их проводов встречались провода ровно трех цветов?
6. На плоскости отмечено 6 красных, 6 синих и 6 зеленых точек, причем никакие 3 из отмеченных точек не лежат на одной прямой. Докажите, что сумма площадей треугольников с вершинами одного цвета составляет не более четверти суммы площадей всех треугольников с отмеченными вершинами.
7. 6 вершин правильного 21-угольника покрашены в красный цвет, и еще 7 — в синий. Докажите, что найдутся красный и синий треугольники, равные друг другу.
8. Числа от 1 до 1000000 покрашены в два цвета — черный и белый. За ход разрешается выбрать любое число от 1 до 1000000 и перекрасить его и все числа, не взаимно простые с ним, в противоположный цвет. Вначале все числа были черными. Можно ли за несколько ходов добиться того, что все числа станут белыми?