

Ушастая геометрия

В ушастых задачах часто (но не всегда) помогает сделать несколько поворотов.

1. На сторонах остроугольного треугольника ABC во внешнюю сторону построены правильные треугольники ABC_1 , BCA_1 , ACB_1 .
 - (а) Докажите, что длины отрезков AA_1 , BB_1 и CC_1 равны.
 - (б) Докажите, что описанные окружности этих треугольников пересекаются в одной точке.
 - (в) Докажите, что отрезки AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке T .
 - (г) Докажите, что сумма расстояний от точки X до вершин треугольника минимальна тогда и только тогда, когда $X = T$.
 - (е) Докажите, что центры построенных треугольников образуют правильный треугольник.
 - (ф) Докажите, что отрезки, соединяющие вершины треугольника ABC с центрами соответствующих правильных треугольников, пересекаются в одной точке.
2. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC построены квадраты $ABPQ$ и $ACMN$.
 - (а) Докажите, что центры квадратов и середины отрезков BC и QN образуют квадрат.
 - (б) Докажите, что медиана треугольника ABC , проведённая из вершины A , перпендикулярна прямой QN .
 - (в) Пусть X — центр квадрата, построенного на стороне BC вовне треугольника ABC . Докажите, что отрезки AH , PM , QC , BN пересекаются в одной точке.
 - (г) Проведём через точки P и M перпендикуляры к прямым AC и AB соответственно. Докажите, что их точка пересечения лежит на высоте треугольника ABC , проведённой из вершины A .
 - (е) Докажите, что отрезки BM и CP пересекаются на высоте треугольника ABC , проведённой из вершины A .
3. На сторонах параллелограмма во внешнюю сторону построены квадраты. Докажите, что их центры образуют квадрат.
4. На сторонах четырёхугольника с равными диагоналями во внешнюю сторону построены правильные треугольники. Докажите, что отрезки, соединяющие центры противоположных треугольников, перпендикулярны.
5. На сторонах четырёхугольника во внешнюю сторону построены квадраты. Докажите, что отрезки, соединяющие центры противоположных квадратов, равны и перпендикулярны.