

Тренировочная олимпиада

1. Квадратный трехчлен $f(x)$ таков, что многочлен $(f(x))^3 - f(x)$ имеет ровно три вещественных корня. Найдите ординату вершины графика этого трехчлена.
2. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Пусть BK — биссектриса этого треугольника. Окружность, описанная около треугольника AKB , пересекает вторично сторону BC в точке L . Докажите, что $CB + CL = AB$.
3. Два игрока играют в следующую игру: сначала на доске записаны числа $2, 4, \dots, 2018$. За один ход можно уменьшить на 1 любое из написанных чисел. При этом с доски стираются нули и числа, совпадающие с какими-то из уже написанных на доске чисел. Проигрывает тот, после чьего хода на доске не остаётся ни одного числа. Кто выигрывает при правильной игре?
4. В компании из 2018 человек некоторые знакомы между собой. Известно, что два человека *друзят*, если они знакомы и у них есть общий знакомый. Назовём человека *необщительным*, если у него нет друзей. Назовём человека *странным*, если он имеет в этой компании 1010 знакомых, но при этом он необщительный. Какое максимальное число странных людей может быть в компании?
5. Коэффициенты a, b, c квадратного трёхчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ — натуральные числа, сумма которых равна 2000. Паша может изменить любой коэффициент на 1, заплатив 1 рубль. Докажите, что он может получить квадратный трёхчлен, имеющий хотя бы один целый корень, заплатив не более 1050 рублей.