

## Предрегиональная геометрия

1. Окружность с центром в точке  $I$  вписана в четырёхугольник  $ABCD$ . Лучи  $BA$  и  $CD$  пересекаются в точке  $P$ , а лучи  $AD$  и  $BC$  пересекаются в точке  $Q$ . Известно, что точка  $P$  лежит на окружности  $\omega$ , описанной около треугольника  $AIC$ . Докажите, что точка  $Q$  тоже лежит на окружности  $\omega$ .
2. Дан треугольник  $ABC$ . Обозначим через  $M$  середину стороны  $AC$ , а через  $P$  — середину отрезка  $CM$ . Описанная окружность треугольника  $ABP$  пересекает сторону  $BC$  во внутренней точке  $Q$ . Докажите, что  $\angle ABM = \angle MQP$ .
3. Две окружности пересекаются в точках  $P$  и  $Q$ . Третья окружность с центром в точке  $P$  пересекает первую в точках  $A$  и  $B$ , а вторую — в точках  $C$  и  $D$  (точки лежат на третьей окружности в порядке  $A, B, C, D$ ). Докажите, что углы  $AQD$  и  $BQC$  равны.
4. Окружность пересекает каждую сторону ромба в двух точках и делит её на три отрезка. Обойдём контур ромба, начав с какой-нибудь вершины, по часовой стрелке, и покрасим три отрезка каждой стороны последовательно в белый, синий и красный цвета. Докажите, что сумма длин белых отрезков равна сумме длин красных отрезков.
5. Вписанная окружность треугольника  $ABC$  касается его сторон  $AB$  и  $BC$  в точках  $C_1$  и  $A_1$  соответственно. Биссектриса угла  $A$  пересекает прямую  $A_1C_1$  в точке  $X$ . Докажите, что  $\angle AXC = 90^\circ$ .
6. На окружности  $\omega$  с центром в точке  $O$  лежат точки  $A$  и  $B$ , на хорде  $AB$  выбрана точка  $X$ . Прямая, проходящая через точку  $X$  перпендикулярно  $OX$ , пересекает касательные к  $\omega$ , проведённые в точках  $A$  и  $B$ , в точках  $C$  и  $D$ . Докажите, что  $CX = DX$ .
7. В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $AD$  и отмечен центр  $I$  вписанной окружности. Хорда  $XY$  описанной окружности треугольника  $BIC$  проходит через точку  $D$ . Докажите, что  $AD$  — биссектриса угла  $XAY$ .

# Бонус

*Задачи, которые интригуют Алексея Вадимовича.*

1. На стороне  $BC$  равностороннего треугольника  $ABC$  как на диаметре построена полуокружность во внешнюю сторону треугольника. Точки  $D$  и  $E$  делят сторону  $BC$  на три равные части. Докажите, лучи  $AD$  и  $AE$  делят полуокружность на 3 равные части.
2. Перед экстрасенсом лежит нестандартная колода из 60 карт рубашкой вверх (4 масти, по 15 карт каждой масти). Он называет масть верхней карты, после чего карту открывают и показывают ему. После этого экстрасенс называет масть следующей карты и т. д. Задача экстрасенса — угадать масть как можно большее число раз. Рубашки карт несимметричны, и экстрасенс видит, в каком из двух положений лежит верхняя карта. Помощник экстрасенса знает порядок карт в колоде, не может менять его, но может расположить рубашку каждой из карт тем или иным образом. Придумайте, как договориться экстрасенсу с помощником, чтобы угадать как можно больше карт.
3. В некотором алфавите ровно  $n$  букв.
  - (а) Докажите, что существует конечное слово из букв этого алфавита, в котором нет двух соседних одинаковых подслов, но таковые появляются при приписывании в конец любой буквы. (*Не интригует.*)
  - (б) Докажите, что минимальная длина такого слова равна  $2^n - 1$ . (*Сильно интригует.*)