Бесконечность

1. В стране Фибоначчи есть купюры достоинством 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 лир. У Леонардо есть купюра 55 лир. Каждый день он может пойти в банк и обменять любую имеющуюся у него купюру на любое количество купюр меньшего достоинства. Кроме того, каждый день Леонардо должен тратить 1 лиру на еду. Докажите, что Леонардо сможет существовать сколь угодно долго, но не бесконечно долго.

2. Два мага сражаются друг с другом. Вначале они оба парят над морем на высоте 100 метров. Маги по очереди применяют заклинания вида «уменьшить высоту парения над морем на a метров у себя и на b метров у соперника», где a, b — вещественные числа, $0 < a < b$. Набор заклинаний у магов один и тот же, их можно использовать в любом порядке и неоднократно. Маг выигрывает дуэль, если после чьего-либо хода его высота над морем будет положительна, а у соперника — нет. Существует ли такой набор заклинаний, что второй маг может гарантированно выиграть (как бы ни действовал первый), если при этом число заклинаний в наборе

(a) конечно;
(b) бесконечно?

3. Назовём сочетанием цифр несколько цифр, записанных подряд. Некоторые сочетания цифр объявлены запрещёнными. Известно, что существует бесконечная десятичная дробь, не содержащая запрещённых сочетаний. Верно ли что тогда найдётся бесконечная периодическая десятичная дробь, не содержащая запрещённых сочетаний, если

(a) Число запрещённых сочетаний конечно
(b) Число запрещённых сочетаний бесконечно

4. Натуральные числа раскрасили в два цвета. Обязательно ли существует одноцветная бесконечная арифметическая прогрессия?

5. Хан и Банах играют в игру с бесконечным количеством ходов. Они по очереди выписывают цифры в последовательность. Причём Хан пишет любое число цифр, а Банах только одну. Хан хочет, чтобы последовательность получилась периодической, а Банах пытается ему помешать. Кто из них преуспеет?

6. **(a)** За дядькой Черномором выстроилось чередой бесконечное число богатырей различного роста, причём рост каждого составляет натуральное число сантиметров. Доказать, что он может приказать части из них выйти из строя так, чтобы в строю осталось бесконечное число богатырей, стоящих в порядке возрастания.

(b) Имеется таблица из трёх строк и бесконечного числа столбцов, занумерованных натуральными числами. В каждой клетке таблицы стоит натуральное число. Доказать, что можно так выбрать последовательность столбцов в таблице, что в каждой из строк число, стоящее в i-м столбце последовательности будет не меньше числа, стоящего в $i+1$-м столбце последовательности.

(c) То же условие, что в пункте а), только на этот раз рост богатырей не обязательно выражается натуральным числом сантиметров. Доказать, что Черномор может приказать части из них выйти из строя так, чтобы в строю осталось бесконечное число богатырей, стоящих в порядке возрастания или убывания.

7. **Лемма Кёнига.** Докажите, что в бесконечном дереве, степень каждой вершины которого конечна, найдётся бесконечный путь.

8. Допустим, что любую конечную карту можно правильным образом расрасить в 4 цвета. Докажите, что тогда и бесконечную карту тоже можно раскрасить в 4 цвета.

9. **(a)** Имеется бесконечный полный граф, все вершины которого занумерованы натуральными числами. Каждое ребро графа покрашено в красный или синий цвет. Доказать, что из вершин этого графа можно выделить бесконечное множество так, что все рёбра, соединяющие вершины из этого множества были бы покрашены в один цвет.

(b) Та же задача, но цветов не 2, а 1000.