# Рациональное и не очень 2

**1.** Олег нарисовал пустую таблицу $50 \times 50$ и написал сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причём 50 из них рациональные, а остальные 50 — иррациональные. Затем в каждую клетку таблицы он записал произведение чисел, написанных около её строки и её столбца («таблица умножения»). Какое наибольшее количество произведений в этой таблице могли оказаться рациональными числами?

**2.** Существует ли такое вещественное $\alpha$, что число $\cos\alpha$ иррационально, а все числа $\cos 2\alpha$, $\cos 3\alpha$, $\cos 4\alpha$, $\cos 5\alpha$ рациональны?

**3.** Действительные числа $x$ и $y$ таковы, что для любых различных простых нечётных $p$ и $q$ число $x^p + y^q$ рационально. Докажите, что $x$ и $y$ — рациональные числа.

**4.** Дано $n$ чисел, $p$ — их произведение. Разность между $p$ и каждым из этих чисел — нечётное число. Докажите, что все данные $n$ чисел иррациональны.

**5.** Докажите, что из арифметической прогрессии с первым членом $a$ и разностью $d \neq 0$ можно выбрать подпоследовательность, являющуюся геометрической прогрессией, тогда и только тогда, когда отношение $\frac{a}{d}$ рационально.

**6.** Сколько существует таких пар натуральных чисел $(m, n)$, каждое из которых не превышает 1000, что $\frac{m}{n+1} < \sqrt{2} < \frac{m+1}{n}$?

**7.** **(a)** Докажите, что $\cos n\phi$ представляется как многочлен от $\cos\phi$.

**(b)** Докажите, что если $\cos\alpha^\circ = \frac{1}{3}$, то $\alpha$ иррационально.

**(c)** Докажите, что если $\frac{p}{q}$ и $\cos\left(\frac{p}{q}\right)^\circ$ являются рациональными числами, то $\cos\left(\frac{p}{q}\right)^\circ$ равен одному из чисел $0, \pm 1, \pm\frac{1}{2}$.

**(d)** Выведите отсюда, что при $n \neq 4$ не существует правильного $n$-угольника с вершинами в узлах целочисленной решётки.

**8.** Существуют ли такие иррациональные числа $a$ и $b$, что $a > 1$, $b > 1$, и $[a^m]$ отлично от $[b^n]$ при любых натуральных числах $m$ и $n$?