Рациональное и не очень

Определение. Число α называется *рациональным*, если оно представимо в виде $\frac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, и *иррациональным* в противном случае.

1. Докажите, что следующие числа иррациональны:
(a) $\sqrt{2}$;
(b) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$;
(c) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$;
(d) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11}+\sqrt{13}$.

2. **(a)** Докажите, что любое рациональное число $\frac{p}{q}$ можно представить в виде десятичной периодической дроби, возможно, с предпериодом.
(b) Докажите, что десятичная дробь конечна только если $q = 2^m 5^n$.
(c) Докажите, что если $(q, 10) = 1$, то предпериода нет.
(d) Пусть $q = 2^\alpha 5^\beta q_1$. Докажите, что длины периодов дробей $\frac{p}{q}$ и $\frac{1}{q_1}$ равны, и оцение длину предпериода.

3. Рационально ли число $0,1234567891011121314\ldots$?

4. Существуют ли иррациональные числа a и b такие, что число a^b рациональное?

5. Докажите, что если число $a+b\sqrt{2}$, где a и b рациональны, является корнем многочленом с целыми коэффициентами, то и число $a-b\sqrt{2}$ является корнем этого многочлена.

6. В числе $\alpha = 0,12457...$ n-я цифра после запятой равна цифре слева от запятой в числе $n\sqrt{2}$. Докажите, что α — иррациональное число.

7. Существует ли такая сфера, на которой имеется ровно одна рациональная точка? (Рациональная точка — точка, у которой все три декартовы координаты являются рациональными числами.)