Многочлены с целыми коэффициентами

Факт. $(a-b) \mid \big(P(a)-P(b)\big)$.
Или, более пафосно, из $a \equiv b \pmod m$ следует $P(a) \equiv P(b) \pmod m$.
Или, если совсем заумно, любой многочлен с целыми коэффициентами корректно определен на остатках по модулю m.

1. Докажите, что если многочлен с целыми коэффициентами при трех различных целых значениях переменной принимает значение 1, то он не имеет ни одного целого корня.

2. На графике многочлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между ними — целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси абсцисс.

3. **(a)** Докажите, что если многочлен с целыми коэффициентами принимает при пяти целых значениях x значение 7, то он не может принимать значение 14 ни при каком целом значении x.
(b) То же самое при четырех значениях.

4. Дан многочлен двадцатой степени с целыми коэффициентами. На плоскости отметили все точки с целыми координатами, у которых ординаты не меньше 0 и не больше 10. Какое наибольшее число отмеченных точек может лежать на графике этого многочлена?

5. Докажите, что для любого многочлена P с целыми коэффициентами и любого натурального k существует такое натуральное n, что $P(1)+\ldots+P(n)$ делится на k.

6. Докажите, что не существует многочлена (степени больше нуля) с целыми коэффициентами, принимающего при каждом натуральном значении аргумента значение, равное некоторому простому числу.

7. **(a)** Докажите, что не существует многочлена (степени больше нуля) с целыми коэффициентами, все значения которого были бы степенями двойки.
(b) Докажите, что не существует многочлена (степени больше нуля) с целыми коэффициентами, для которого множество простых делителей ненулевых значений в целых точках конечно.