Дискретная непрерывность

1. Шеренга новобранцев стояла лицом к сержанту. По команде «налево» некоторые повернулись налево, некоторые — направо, а остальные — кругом. Всегда ли сержант сможет встать в строй так, чтобы с обеих сторон от него оказалось поровну новобранцев, стоящих к нему лицом?

2. Существуют ли сто последовательных натуральных чисел, среди которых ровно пять простых?

3. На доске написаны два числа: 1/2017 и 1/2018. На каждом ходу Вася называет любое число x, а Петя увеличивает одно из чисел на доске (какое захочет) на x. Вася выигрывает, если в какой-то момент одно из чисел на доске станет равным 1. Сможет ли Вася выиграть, как бы ни действовал Петя?

4. В круге проведены несколько хорд так, что любые две из них пересекаются внутри круга. Докажите, что можно пересечь все хорды одним диаметром.

5. $2n$ радиусов разделили круг на $2n$ равных секторов: n синих и n красных, чередующихся в произвольном порядке. В синие сектора, начиная с некоторого, записывают против хода часовой стрелки числа от 1 до n. В красные сектора, начиная с некоторого, записывают те же числа, но по ходу часовой стрелки. Докажите, что найдется полукруг, в котором записаны все числа от 1 до n.

6. В бесконечной последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$ число a_1 равно 1, а каждое следующее число a_n строится из предыдущего a_{n-1} по правилу: если у числа n наибольший нечетный делитель имеет остаток 1 от деления на 4, то $a_n = a_{n-1} + 1$, если же остаток равен 3, то $a_n = a_{n-1} - 1$. Докажите, что в этой последовательности
   (a) число 1 встречается бесконечно много раз;
   (b) каждое натуральное число встречается бесконечно много раз.

7. По кругу стоят n мальчиков и n девочек. Назовем пару из мальчика и девочки *хорошей*, если на одной из дуг между ними стоит поровну мальчиков и девочек (в частности, стоящие рядом мальчик и девочка образуют хорошую пару). Оказалось, что есть девочка, которая участвует ровно в 10 хороших парах. Докажите, что есть и мальчик, который участвует ровно в 10 хороших парах.

8. Улицы города Дужинска — простые ломаные, не пересекающиеся между собой во внутренних точках. Каждая улица соединяет два перекрестка и покрашена в один из трех цветов: белый, красный или синий. На каждом перекрестке сходятся ровно три улицы, по одной каждого цвета. Перекресток называется положительным, если при его обходе против часовой стрелки цвета улиц идут в следующем порядке: белый, синий, красный, и отрицательным в противном случае. Докажите, что разность между числом положительных и числом отрицательных перекрестков кратна четырем.