

Комбинаторная геометрия

1. На плоскости нарисовано несколько прямых (не меньше двух), никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. Докажите, что среди частей, на которые эти прямые делят плоскость, найдется хотя бы один угол.
2. На плоскости нарисовано несколько многоугольников, каждые два из которых имеют общую точку. Докажите, что найдется прямая, пересекающая все эти многоугольники.
3. Существует ли такой выпуклый (то есть со всеми углами меньше 180°) пятиугольник $ABCDE$, что все углы ABD , BCE , CDA , DEB и EAC — тупые?
4. У правильного 2017-угольника отмечены 65 вершин. Докажите, что существует трапеция с вершинами в отмеченных точках.
5. Каждый из трех синих квадратов пересекается с каждым из трех красных. Верно ли, что какие-то два одноцветных квадрата тоже пересекаются?
6. Единичный квадрат разбит на конечное число квадратов (размеры которых могут различаться). Может ли сумма периметров квадратов, пересекающихся с главной диагональю, быть больше 2017?
 - (a) «пересекаться» с диагональю достаточно по вершине;
 - (b) «пересекаться» надо по внутренности.
7.
 - (a) Существуют ли два равных семиугольника, все вершины которых совпадают, но никакие стороны не совпадают?
 - (b) А три таких семиугольника?
(Напоминание: многоугольник на плоскости ограничен несамопересекающейся замкнутой ломаной.)
8. Существуют ли такие 2018 треугольников, ни один из которых нельзя покрыть 2017-ю остальными?
9. Существует ли невыпуклый многогранник, вписанный в сферу?
(Многогранник вписан в сферу, если все его вершины лежат на сфере.)
10. Пространство разбито на одинаковые кубики. Верно ли, что для *каждого* из этих кубиков обязательно найдется другой, имеющий с ним общую грань?
11. («Багаж в Московском метрополитене») Будем называть «размером» прямоугольного параллелепипеда сумму трех его измерений — длины, ширины и высоты. Может ли случиться, что в некотором прямоугольном параллелепипеде поместился больший по размеру прямоугольный параллелепипед?