Жадный алгоритм

1. В графе 2000 вершин. Степень каждой вершины меньше 40. Докажите, что можно выбрать 50 вершин, попарно не соединенных друг с другом.

2. Назовем число *волшебным,* если оно равно 2, или представляется в виде $3^a 5^b$, где a и b — целые неотрицательные. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде суммы различных волшебных чисел.

3. Петя нарисовал на бумаге дерево T на n вершинах. Вася нарисовал граф G, степень каждой вершины которого не менее n. Обязательно ли Петя может покрасить некоторые рёбра графа G красным цветом, чтобы получившийся красный граф был изоморфен T?

4. Для $n = 1, 2, 3$ будем называть числом n-го типа любое число, которое либо равно 0, либо входит в бесконечную геометрическую прогрессию $1, (n+2), (n+2)^2, \ldots$, либо является суммой нескольких различных её членов. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде суммы числа первого типа, числа второго типа и числа третьего типа.

5. Докажите, что любое положительное рациональное число может быть представлено в виде суммы различных дробей с числителем, равным единице, и натуральным знаменателем.

6. Двое играют в игру. Они по очереди проводят диагонали в выпуклом 2016-угольнике. Когда диагональ пересекает k уже проведённых диагоналей, игрок, который её провёл, платит в банк k рублей. Проигрывает тот, кто заплатит в банк больше. Есть ли у одного из игроков выигрышная стратегия?

7. На плоскости расположено несколько кругов, площадь объединения которых равна S. Докажите, что из них можно выбрать несколько непересекающихся кругов, суммарная площадь которых не менее $\frac{S}{9}$.