Теорема Хелли

Определение. Фигура называется *выпуклой*, если вместе с любыми двумя своими точками она содержит соединяющий их отрезок.

Упражнение. Докажите, что пересечение любого семейства выпуклых множеств является выпуклым множеством.

1. На прямой выбрано несколько отрезков так, что любые два из них имеют общую точку. Докажите, что все отрезки имеют общую точку.

2. **Теорема Хелли для плоскости.** На плоскости отмечено несколько выпуклых множеств. Известно, что любые три из них имеют общую точку. Докажите, что
(a) любые четыре множества имеют общую точку;
(b) все множества имеют общую точку.
(c) Докажите, что теорема Хелли не верна для бесконечного количества множеств.

3. Дан выпуклый многоугольник. Известно, что для любых трёх его сторон можно выбрать точку O внутри многоугольника так, что перпендикуляры, опущенные из точки O на эти три стороны, попадают на сами стороны, а не на их продолжения. Докажите, что тогда такую точку O можно выбрать для всех сторон одновременно.

4. На плоскости даны несколько полуплоскостей, внутренности которых покрывают всю плоскость. Докажите, что из них можно выбрать три, внутренности которых также покрывают всю плоскость.

5. Докажите, что в любом выпуклом семиугольнике найдётся точка, не принадлежащая ни одному из четырёхугольников, образованных четвёрками его последовательных вершин.

6. На окружности отметили несколько дуг длины меньше половины окружности. Известно, что любые три дуги имеют общую точку. Докажите, что все дуги имеют общую точку.

7. На плоскости отмечено несколько точек. Оказалось, что любые три точки можно покрыть кругом радиуса 1. Докажите, что все точки можно покрыть кругом радиуса 1.

8. **Теорема Юнга.** Докажите, что любое множество точек, расстояние между любыми двумя из которых не превосходит 1, можно покрыть кругом радиуса $\sqrt{1/3}$.