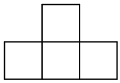
Скоро ММО

1. В стране несколько городов, некоторые пары из них соединены дорогами. Два города назовем соседними, если между ними проведена дорога. Обязательно ли можно каждому городу присвоить натуральное число так, чтобы среди двух чисел, присвоенных любым соседним городам, одно делилось на другое, а среди двух чисел, присвоенных любым не соседним городам, ни одно из них не делилось на другое?

2. Вася задумал натуральное число, большее 10, в десятичной записи которого все цифры одинаковы. Докажите, что Васино число не является квадратом натурального числа.

3. Клетки таблицы 2018×2018 раскрашены в 4 цвета. Рассмотрим все способы размещения внутри этой таблицы Т-тетраминошки (см. рисунок, фигурку можно поворачивать). Докажите, что Т-тетраминошка содержит клетки четырех разных цветов менее чем в 51% из этих способов.



4. Петя выписывает все возможные 2018-буквенные слова, состоящие только из букв «а», «б», «в» (слово – это последовательность букв, не обязательно осмысленная; в слове не обязательно использовать все буквы). В скольких из них буква «а» встречается четное количество раз?

5. Точка I – центр вписанной окружности треугольника ABC. Прямая AI пересекает описанную около треугольника окружность в точке D. Известно, что $\angle BIC = 120^\circ$, $ID = \frac{7}{\sqrt{3}}$ и $BC - AB = 2$. Найдите AI.

6. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Точки K, L, M, N – середины его сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что $\angle ANO = \angle BLO$ тогда и только тогда, когда $\angle BKO = \angle CMO$.

7. (старая) Дан многочлен двадцатой степени с целыми коэффициентами. На плоскости отметили все точки с целыми координатами, у которых ординаты не меньше 0 и не больше 10. Какое наибольшее число отмеченных точек может лежать на графике этого многочлена?

8. (старая) Назовем приведенный квадратный трехчлен с целыми коэффициентами *сносным*, если его корни — целые числа, а коэффициенты по модулю не превосходят 2018. Петя сложил все сносные квадратные трехчлены. Докажите, что у него получится трехчлен, не имеющий действительных корней.

9. (старая) Найдите все натуральные k такие, что при каждом нечетном $n > 100$ число $20^n + 13^n$ делится на k.