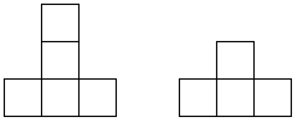
Конструктивы

1. Нарисуйте фигуру, которую можно разрезать на четыре фигурки, изображенные слева, а можно — на пять фигурок, изображенных справа. (Фигурки можно поворачивать.)



2. Существуют ли такие натуральные числа a, b, c, d, что $a^3+b^3+c^3+d^3 = 100^{100}$?

3. На плоскости нарисован чёрный квадрат. Имеется семь квадратных плиток того же размера. Можно ли расположить их на плоскости так, чтобы они не перекрывались и чтобы каждая плитка покрывала хотя бы часть чёрного квадрата?

4. На шахматной доске 8×8 стоит кубик (нижняя грань совпадает с одной из клеток доски). Его прокатили по доске, перекатывая через рёбра, так, что кубик побывал на всех клетках (на некоторых, возможно, несколько раз). Могло ли случиться, что одна из его граней ни разу не лежала на доске?

5. Существуют ли натуральные числа m и n, для которых верно равенство: $(-2a^nb^n)^m + (3a^mb^m)^n = a^6b^6$?

6. Треугольник разбили на пять треугольников, ему подобных. Верно ли, что исходный треугольник – прямоугольный?

7. Докажите, что существует бесконечно много таких троек натуральных чисел (a, b, c), что $a^{15} + b^{17} = c^{16}$.

8. Шесть отрезков таковы, что из любых трех можно составить треугольник. Верно ли, что из этих отрезков можно составить тетраэдр?

9. Докажите, что найдутся четыре таких целых числа a, b, c, d, по модулю больших 1000000, что $1/a + 1/b + 1/c + 1/d = 1/abcd$.

10. **(a)** В бесконечной последовательности бумажных прямоугольников площадь n-го прямоугольника равна n^2. Обязательно ли можно покрыть ими плоскость? Наложения допускаются.

(b) Дана бесконечная последовательность бумажных квадратов. Обязательно ли можно покрыть ими плоскость (наложения допускаются), если известно, что для любого числа N найдется набор квадратов суммарной площади больше N?