

Комбинаторная геометрия

1. На плоскости даны n точек. Расстояние между любыми двумя из них не превосходит единицы. Докажите, что все n точек можно накрыть квадратом 1×1 .
2. Из точки O выходит несколько лучей. Угол между любыми двумя меньше 120° . Докажите, что найдутся два луча такие, что все остальные содержатся в угле между ними.
3. Несколько прямых общего положения разбивают плоскость на части. Докажите, что хотя бы одна из этих частей — угол.
4. Докажите, что из любых пяти точек общего положения можно выбрать четыре, являющиеся вершинами выпуклого четырехугольника.
5. Длина наибольшей стороны треугольника равна 1. Докажите, что три круга радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$ с центрами в вершинах покрывают треугольник целиком.
6. На плоскости нарисовано несколько многоугольников, каждые два из которых имеют общую точку. Докажите, что найдется прямая, пересекающая все эти многоугольники.
7. Существует ли такой выпуклый пятиугольник $ABCDE$, что все углы ABD , BCE , CDA , DEB и EAC — тупые?
8. Выпуклый многоугольник A лежит внутри выпуклого многоугольника B . Может ли оказаться, что периметр A больше периметра B ?
9. Докажите, что для любой точки O внутри выпуклого многоугольника найдется сторона l такая, что проекция O на прямую, содержащую l , лежит на l .
10. Конечное множество точек на плоскости удовлетворяет следующему условию: для любых двух точек множества на прямой, их соединяющей, найдется третья точка из множества. Докажите, что все точки множества лежат на одной прямой.