Многочлены

1. Существуют ли такие три квадратных трехчлена, что каждый из них имеет два различных корня, а сумма любых двух из них корней не имеет?

2. Квадратный трехчлен $f(x)$ имеет два различных корня. Оказалось, что для любых чисел a и b верно неравенство $f(a^2+b^2) \geqslant f(2ab)$. Докажите, что хотя бы один из корней этого трехчлена — отрицательный.

3. Квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$, не имеющий корней, таков, что коэффициент b рационален, а среди чисел c и $f(c)$ ровно одно иррационально. Может ли дискриминант трехчлена $f(x)$ быть рациональным?

4. Даны различные действительные числа a, b, c. Докажите, что хотя бы два из уравнений $(x-a)(x-b) = x-c$, $(x-b)(x-c) = x-a$, $(x-c)(x-a) = x-b$ имеют решение.

5. Даны три квадратных трехчлена $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ с положительными старшими коэффициентами, имеющие по два различных корня. Оказалось, что при подстановке корней трехчлена $R(x)$ в многочлен $P(x)+Q(x)$ получаются равные значения. Аналогично, при подстановке корней трехчлена $P(x)$ в многочлен $Q(x)+R(x)$ получаются равные значения, а также при подстановке корней трехчлена $Q(x)$ в многочлен $P(x)+R(x)$ получаются равные значения. Докажите, что три числа: сумма корней трехчлена $P(x)$, сумма корней трехчлена $Q(x)$ и сумма корней трехчлена $R(x)$ равны между собой.

6. Назовем приведенный квадратный трехчлен с целыми коэффициентами *сносным*, если его корни — целые числа, а коэффициенты по модулю не превосходят 2018. Петя сложил все сносные квадратные трехчлены. Докажите, что у него получится трехчлен, не имеющий действительных корней.

7. Дан многочлен двадцатой степени с целыми коэффициентами. На плоскости отметили все точки с целыми координатами, у которых ординаты не меньше 0 и не больше 10. Какое наибольшее число отмеченных точек может лежать на графике этого многочлена?

8. Дан многочлен $P(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, у которого каждый коэффициент a_i принадлежит отрезку $[100, 101]$. При каком минимальном n у такого многочлена может найтись действительный корень?