

Маленькие неравенства

1. а) $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \geq \frac{ab+bc+ca}{3}, \quad a, b, c > 0;$
б) $ab+bc+ca \geq a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}+c\sqrt{ab}, \quad a, b, c > 0.$
2. $2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{b} \geq 5\sqrt[5]{ab}.$
3. $(a+b+c+d)^2 \leq 4(a^2+b^2+c^2+d^2).$
4. $(a+1)(b+1)(a+c)(b+c) \geq 16abc.$
5. $(a+b+c+d+1)^2 \geq 4(a^2+b^2+c^2+d^2), \quad a, b, c, d \in [0; 1].$
6. $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^8 \geq 64xy(x+y)^2.$
7. $\frac{3}{1/a+1/b+1/c} \leq \frac{a+b+c}{3}.$
8. Пусть $a, b, c > 0$ и $abc = 1$. Докажите, что $\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} \leq 1.$
9. Пусть $x, y > 0$ и $x^2 + y^3 \geq x^3 + y^4$. Докажите, что $x^3 + y^3 \leq 2.$
10. $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+xy}}, \quad x, y \in [0, 1].$
11. Пусть $a, b, c > 0$ и $ab+bc+ac = 1$. Докажите, что
$$\sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b} + \sqrt[3]{\frac{1}{b}+6c} + \sqrt[3]{\frac{1}{c}+6a} \leq \frac{1}{abc}.$$