Разнобой

1. Пусть d_1, d_2, d_3 и d_4 — наименьшие различные делители натурального числа n. Оказалось, что $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = n$. Чему могло быть равно n (укажите все варианты)?

2. Дан треугольник ABC, на стороне AC выбрана точка D так, что $\angle ADB = 60^\circ$ и $BD = AC$. Докажите, что $AB + CD > BC$.

3. Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Докажите, что $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} \geqslant \sqrt{3}$.

4. Существуют ли натуральные числа a, b и c (причем a — нечетное) такие, что $a^{10} + b^{10} = c^{11}$?

5. Две дворовые команды играют в футбол до 10 голов (игра прекращается, когда одна из команд забьет 10 голов). В процессе игры ведется протокол, в который вносится счет после каждого гола. Сколько различных протоколов может получиться?

6. Вся плоскость разбита тремя сериями параллельных прямых на равные между собой равносторонние треугольники (треугольная решетка). Существуют ли четыре вершины этих треугольников, образующие квадрат?

7. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB взяты точки M и N (N между M и B) такие, что $MN^2 = AM^2 + NB^2$. Найдите $\angle MCN$.

8. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены дорогами, причем между каждыми двумя городами существует единственный несамопересекающийся путь по дорогам. Известно, что в стране ровно 100 городов, из которых выходит по одной дороге. Докажите, что можно построить 50 новых дорог так, что после этого даже при закрытии любой дороги можно будет из каждого города попасть в любой другой.