Неравенства о средних.

Для любых положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ имеют место следующие неравенства:

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}.$$

Во всех предложенных задачах подразумевается, что a, b, c — положительные вещественные числа.

1. Докажите, что

$$(a+b+c+d)^2 \leq 4(a^2+b^2+c^2+d^2).$$

2. Докажите, что

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab}+\sqrt{cd}.$$

3. Докажите, что

$$\sqrt[4]{ab^3} \leq \frac{a+3b}{4}.$$

4. Докажите, что

$$2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{b} \geq 5\sqrt[5]{ab}$$

.

5. Докажите, что

$$ab^2c^3d^4 \leq (\frac{a+2b+3c+4d}{10})^{10}.$$

6. Докажите, что

$$(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c).$$

7. Докажите, что

$$2^{\sqrt[12]{x}}+2^{\sqrt[4]{x}} \geq 2 \cdot 2^{\sqrt[6]{x}}.$$

8. Докажите, что

$$(a+1)(b+1)(a+c)(b+c) \geq 16abc.$$

9. Докажите, что

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geq 9abc.$$

10. Докажите, что

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

11. Докажите, что

$$a+b+c \leq \frac{a^2+b^2}{2c}+\frac{b^2+c^2}{2a}+\frac{c^2+a^2}{2b}.$$