Неравенство Коши для двух переменных

Задача 0. Докажите, что $999999^2 + 1000001^2 \geq 1999999999998$.

Задача 1. Докажите, что $x^4 + \frac{1}{x^2} \geq 2x$ для всех вещественных ненулевых чисел x.

Задача 2. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$.

Задача 3. Докажите, что $\frac{x+y+z+t}{4} \geq \sqrt[4]{xyzt}$ для всех вещественных чисел x, y, z, t.

Задача 4. Докажите, что среднее арифметическое а) двух б)* четырёх положительных вещественных чисел больше или равно их среднего гармонического, т.е. что $\frac{x+y}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ (соответсвующие выражения для четырёх переменных пишутся по аналогии).

Задача 5. Докажите, что для всех положительных чисел a, b, c выполнено неравенство

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2bc + b^2ac + c^2ab.$$

Задача 6. Докажите, что для всех положительных чисел a, b, c выполнено неравенство

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3b + b^3c + c^3a.$$

Задача 7. Докажите, что для всех положительных чисел x выполнено неравенство $x^4 + 1 \geq x^3 + x$.

Задача 8. Пусть $a_1, ..., a_{2013}$ и $b_1, ..., b_{2013}$ — это два набора вещественных чисел. Докажите, что

$$(a_1^2 + ... + a_{2013}^2)(b_1^2 + ... + b_{2013}^2) \geq (a_1b_1 + ... + a_{2013}b_{2013})^2.$$

Задача 9. Пусть x — это некоторое натуральное число, S — это сумма всех его делителей (включая 1 и само число x), N — это число делителей x (включая 1 и само число x). Докажите, что $S \geq N\sqrt{x}$.

Неравенство Коши для двух переменных

Задача 0. Докажите, что $999999^2 + 1000001^2 \geq 1999999999998$.

Задача 1. Докажите, что $x^4 + \frac{1}{x^2} \geq 2x$ для всех вещественных ненулевых чисел x.

Задача 2. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$.

Задача 3. Докажите, что $\frac{x+y+z+t}{4} \geq \sqrt[4]{xyzt}$ для всех вещественных чисел x, y, z, t.

Задача 4. Докажите, что среднее арифметическое а) двух б)* четырёх положительных вещественных чисел больше или равно их среднего гармонического, т.е. что $\frac{x+y}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ (соответсвующие выражения для четырёх переменных пишутся по аналогии).

Задача 5. Докажите, что для всех положительных чисел a, b, c выполнено неравенство

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2bc + b^2ac + c^2ab.$$

Задача 6. Докажите, что для всех положительных чисел a, b, c выполнено неравенство

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3b + b^3c + c^3a.$$

Задача 7. Докажите, что для всех положительных чисел x выполнено неравенство $x^4 + 1 \geq x^3 + x$.

Задача 8. Пусть $a_1, ..., a_{2013}$ и $b_1, ..., b_{2013}$ — это два набора вещественных чисел. Докажите, что

$$(a_1^2 + ... + a_{2013}^2)(b_1^2 + ... + b_{2013}^2) \geq (a_1b_1 + ... + a_{2013}b_{2013})^2.$$

Задача 9. Пусть x — это некоторое натуральное число, S — это сумма всех его делителей (включая 1 и само число x), N — это число делителей x (включая 1 и само число x). Докажите, что $S \geq N\sqrt{x}$.