Индукция и графы.

1. В некотором государстве любые два города связаны авиалинией одной из двух авиакомпаний. Докажите, что можно закрыть одну из авиакомпаний так, что по–прежнему от любого города можно будет добраться до любого другого.

В Лапландии любые два города соединены дорогой с односторонним движением.

2. Докажите, что в Лапландии есть город, из которого можно добраться в любой другой.

3. Докажите, что в Лапландии есть город, стартовав из которого, можно объехать все города, побывав в каждом из них ровно по одному разу.

4. Докажите, что в Лапландии есть город из которого можно добраться в любой другой не более, чем с одной пересадкой.

5. Докажите, что, при любой схеме движения в Лапландии можно поменять направление движения на одной дороге так, чтобы от любого города можно было доехать до любого другого.

6. Докажите, что после окончания однокругового турнира по теннису его участников можно выстроить в ряд так, что каждый выиграл у следующего за ним в этом ряду.

7. Несколько человек играют в теннис на вылет. Они установили очередь, вначале играют первые двое, затем победитель играет со следующим из очереди. На другой день ребята играют по той же системе, но порядок в очереди изменен на противоположный. Докажите, что найдется пара игроков, которые встречались и в первый день и во второй.

8. В компании из n человек $(n > 3)$ у каждого появилась новость, известная ему одному. За один телефонный разговор двое сообщают друг другу все известные им новости. Докажите, что за $2n - 4$ разговора все они могут узнать все новости.

9. В дереве n вершин. Докажите, что их можно так раскрасить в два цвета, чтобы укаждого ребра концы были разных цветов.

10. Дан граф, содержащий $2n$ вершин и не менее чем $n^2 + 1$ ребро. Докажите, что в нем есть три вершины, попарно соединенные ребрами.

11. В графе E ребер. Докажите, что для любого натурального числа t граф можно ракрасить в t цветов так, что не более чем у $\frac{E}{t}$ ребер концы будут одинаковых цветов.