

Индукция: доказательство тождеств.

Докажите тождества:

1.

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

2.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

3.

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

4.

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = \frac{n-1}{n}.$$

5.

$$(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot \dots \cdot (n+n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1).$$

6.

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

7.

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

8.

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1) \cdot n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

9.

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

10.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

11.

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

12. Обозначим через $F_1, F_2, F_3, F_4, \dots$ последовательность чисел Фибоначчи. (По определению $F_1 = F_2 = 1$, а $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ для любого $k \geq 3$.) Докажите, что

$$F_{m+n} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n$$

для любых $m, n \geq 2$.