

Индукция: знакомство.

1. Вокруг города проходит кольцевая дорога с односторонним движением, и через город проходит несколько магистралей с односторонним движением. Докажите, что есть такой квартал (не разбитый магистралями на части), вокруг которого можно объехать, не нарушая правил.

2. *Ханойские башни.* Имеется три стержня, на некоторые из которых надеты деревянные кольца. Все кольца разного радиуса, большее кольцо не может быть надето поверх меньшего кольца. Разрешается перекладывать верхнее кольцо с одного стержня на другой, если при этом не нарушается правило размеров. Докажите, что при любом исходном расположении колец все их можно собрать на одном стержне.

3. На плоскости проведено несколько прямых. Докажите, что части, на которые эти прямые делят плоскость, можно раскрасить в два цвета так, чтобы любые две соседние части были окрашены в разные цвета.

4. Концы отрезка AB занумерованы числами 1 и 2. Разобьем его на части точками M_1, M_2, \dots, M_n и поставим в соответствие каждой из этих точек ровно одно из чисел 1 или 2. Докажите, что число получившихся при делении отрезков, концы которых имеют различные номера, нечетно.

5. В прямоугольнике $3 \times n$ расставлены фишки трех цветов по n каждого цвета. Докажите, что переставляя фишки в строчках, можно сделать так, чтобы в каждом столбце все три фишки стали разными.

6. В нескольких местах кольцевой дороги стоят автомобили. Если весь бензин, имеющийся в их баках, слить в одну машину, то эта машина смогла бы проехать по всей кольцевой дороге до своего прежнего места. Докажите, что по меньшей мере одна из машин, стоящих на дороге, может объехать все кольцо, забирая по пути бензин у остальных машин.

8. На лестнице нарисованы стрелочки. На одной из ступеней стоит робот. Он идет со ступеньки в ту сторону, в которую указывает стрелочка, после чего стрелочка на ступеньке, с которой он сошел, обращается в противоположную сторону. Докажите, что когда-нибудь робот покинет лестницу.

9. Вершины выпуклого многоугольника с нечетным числом сторон окрасили в три цвета так, что любые две соседние вершины окрашены в разные цвета. Докажите, что многоугольник можно разрезать непересекающимися диагоналями на треугольники так, чтобы у каждого треугольника цвета всех вершин были различны.

10. Несколько мудрецов задремали на берегу озера, и шаловливые дети испачкали их лица сажей. Проснувшись, мудрецы увидели физиономии друг друга и начали смеяться. Однако вскоре перестали. Почему?