Сравнения по модулю

7 класс, вторая страта

06.12.17

Опр. Пусть $a, b \in Z$, $m \in \mathbb{N}$. Говорят, что a и b сравнимы по модулю m ($a \equiv b \pmod{m}$) если a и b имеют одинаковые остатки при делении на m.

Свойства сравнений

Пусть $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$. Тогда

1. $a \equiv r \pmod{m}$, где r — остаток при делении a на m;

2. Пусть $a \equiv b \pmod{m}$ и $b \equiv c \pmod{m}$, тогда $a \equiv c \pmod{m}$;

3. $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ (остаток суммы равен остатку суммы остатков);

4. $a - c \equiv b - d \pmod{m}$ (остаток разности равен остатку разности остатков);

5. $ac \equiv bd \pmod{m}$ (остаток произведения равен остатку произведения остатков);

6. $a^n \equiv b^n \pmod{m}$ для любого натурального n.

Задачи

1. Найдите остаток от деления 6^{2016} на 7.

2. Найдите остаток от деления 3^{2016} на 7.

3. Докажите, что $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133 для любого n.

4. Найдите остатки от деления 47^{101} на **(a)** 46, 48; **(b)** 31.

5. Найдите остаток от деления **(a)** $9^{2016} + 13^{2016}$; **(b)** $9^{2017} + 13^{2017}$ на 11.

6. Докажите, что $a \equiv b \pmod{m}$ тогда и только тогда, когда $a - b \,\vdots\, m$.

7. Докажите, что $2^{100} \equiv 3^{100} \pmod{5}$ и $2^{100} \equiv 3^{100} \pmod{13}$. Найдите ещё один простой модуль, по которому сравнимы эти числа.

8. Можно ли сокращать в сравнениях? То есть, если $ax \equiv ay \pmod{m}$, a не делится на n, то следует ли из этого, что $x \equiv y \pmod{m}$?

9. Докажите, что $a^n - b^n$ делится на $a - b$ для любого натурального n.

10. Докажите, что $2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}$ делится на 17.

11. Докажите, что $2013! + \dfrac{4026!}{2013!}$ делится на 4027.

12. Докажите, что $1^{2015} + 2^{2015} + \ldots + 2016^{2015}$ делится на 2017.

13. Докажите, что $(2^n - 1)^n - 3$ делится на $2^n - 3$ для любого n.