

Обратные остатки и теорема Вильсона

7 класс

10.03.18

Утверждение. Дано простое число p и его некоторый ненулевой остаток a . Существует и при том единственный остаток b , что $ab \equiv 1 \pmod{p}$ (такой остаток b называется *обратным остатком* a).

(Теорема Вильсона) Пусть p — некоторое простое число. Тогда $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

1. Пусть $5x + 8y \equiv 1 \pmod{13}$
 - (a) Докажите, что $5x + 60y \equiv 1 \pmod{13}$;
 - (b) Найдите остаток от деления $18x - 31y$ на 13;
 - (c) Найдите остаток от деления $x - y$ на 13.
2. Сопоставьте каждому остатку его обратный по модулю (a) 19; (b) 23.
3. Используя Малую теорему Ферма найдите обратный остаток к 13 по модулю 29.
4. В Москве каждую секунду один из жителей ест печеньку. Доказать, что если собрать все печеньки, съеденные за 6 недель и одну секунду, то их можно разделить на 11 равных кучек.
5. Пусть $a_1, \dots, a_p = p$ ($p > 2$ — простое число) подряд идущих чётных чисел. Докажите, что:
 - (a) существует некоторый член последовательности a_m , делящийся на p ;
 - (b) существует некоторый член a_k , такой что $a_k + a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_p$ делится на p ;
 - (c) существует некоторый член a_k , такой что $a_k + a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_p$ делится на p^2 .
6. Пусть p — простое число. Докажите, что $(p-k)! \cdot (k-1)! \equiv (-1)^k \pmod{p}$.
7. **Обратная теорема Вильсона** Докажите, что если $(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$, то число n — простое.
8. Пусть p — простое число. Докажите, что $(2p-1)! - p$ делится на p^2 .
9. Пусть числа p и $p+2$ являются простыми числами-близнецами. Докажите, что справедливо $4((p-1)! + 1) + p \equiv 0 \pmod{p^2+2p}$.
10. (a) На доске написаны числа $\frac{100}{1}, \frac{99}{2}, \dots, \frac{2}{99}, \frac{1}{100}$. Можно ли выбрать какие-то пять из них, произведение которых равняется единице?
- (b) Пусть произведение каких-то $2k+1$ чисел, написанных на доске, равно $\frac{m}{n}$. Докажите, что $m \equiv -n$.