

Обратные остатки и теорема Вильсона

7 класс
10.03.18

Утверждение. Дано простое число p и его некоторый ненулевой остаток a . Существует и при том единственный остаток b , что $ab \equiv 1 \pmod{p}$ (такой остаток b называется *обратным* остатка a).

(Теорема Вильсона) Пусть p — некоторое простое число. Тогда $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

1. Пусть $5x + 8y \equiv 1 \pmod{13}$
 - (а) Докажите, что $5x + 60y \equiv 1 \pmod{13}$;
 - (б) Найдите остаток от деления $18x - 31y$ на 13;
 - (с) Найдите остаток от деления $x - y$ на 13.
 2. Сопоставьте каждому остатку его обратный по модулю (а) 19; (б) 23.
 3. Используя Малую теорему Ферма найдите обратный остаток к 13 по модулю 29.
 4. В Москве каждую секунду один из жителей ест печенье. Доказать, что если собрать все печенье, съеденные за 6 недель и одну секунду, то их можно разделить на 11 равных чучек.
 5. Пусть a_1, \dots, a_p — p ($p > 2$ — простое число) подряд идущих чётных чисел. Докажите, что:
 - (а) существует некоторый член последовательности a_m , делящийся на p ;
 - (б) существует некоторый член a_k , такой что $a_k + a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_p$ делится на p ;
 - (с) существует некоторый член a_k , такой что $a_k + a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_p$ делится на p^2 .
 6. Пусть p — простое число. Докажите, что $(p-k)! \cdot (k-1)! \equiv (-1)^k \pmod{p}$.
 7. **Обратная теорема Вильсона** Докажите, что если $(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$, то число n — простое.
-
8. Пусть p — простое число. Докажите, что $(2p-1)! - p$ делится на p^2 .
 9. Пусть числа p и $p+2$ являются простыми числами-близнецами. Докажите, что справедливо $4((p-1)! + 1) + p \equiv 0 \pmod{p^2+2p}$.
 10. (а) На доске написаны числа $\frac{100}{1}, \frac{99}{2}, \dots, \frac{2}{99}, \frac{1}{100}$. Можно ли выбрать какие-то пять из них, произведение которых равняется единице?
 (б) Пусть произведение каких-то $2k+1$ чисел, написанных на доске, равно $\frac{m}{n}$. Докажите, что $m \equiv -n \pmod{101}$.