Симедиана в задачах

1. Высоты AA' и CC' остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точка M — середина стороны AC. Докажите, что точка пересечения прямых, симметричных BM и HM относительно биссектрис углов ABC и AHC соответственно, лежит на прямой $A'C'$.

2. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC высоты AA' и BB' пересекаются в точке H, а медианы треугольника AHB пересекаются в точке M. Прямая CM делит отрезок $A'B'$ пополам. Найдите угол C исходного треугольника.

3. К двум окружностям ω_1 и ω_2, пересекающимся в точках A и B, проведена их общая касательная CD. (Точка B расположена ближе к прямой CD, чем A.) Прямая, проходящая через A, вторично пересекает ω_1 и ω_2 в точках K и L. (A лежит между K и L.) Прямые KC и LD пересекаются в точке P. Докажите, что PB — симедиана треугольника KPL.

4. В остроугольном треугольнике ABC на высоте BK как на диаметре построена окружность ω, пересекающая стороны AB и BC в точках E и F соответственно. К окружности ω в точках E и F проведены касательные. Докажите, что их точка пересечения лежит на прямой, содержащей медиану BM треугольника ABC.

5. Дан треугольник ABC. Касательная в точке C к его описанной окружности пересекает прямую AB в точке D. Касательные к описанной окружности треугольника ACD в точках A и C пересекаются в точке K. Докажите, что прямая DK делит отрезок BC пополам.

6. Из точки A к окружности ω проведена касательная AD и произвольная секущая s, пересекающая окружность в точках B и C. (B лежит между A и C.) Докажите, что окружность ω_s, проходящая через точки C и D и касающаяся прямой BD, проходит через фиксированную отличную от D точку. (Т.е. все окружности ω_s имеют общую точку, которая не зависит от выбора секущей s.)

7. Даны окружность, ее хорда AB и середина W меньшей дуги AB. На большей дуге AB выбирается произвольная точка C. Касательная к окружности, проведенная из точки C, пересекает касательные, проведенные из точек A и B, в точках X и Y соответственно. Прямые WX и WY пересекают прямую AB в точках N и M соответственно. Докажите, что длина отрезка NM не зависит от выбора точки C.

8. Неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность ω. Касательная к этой окружности в точке C пересекает прямую AB в точке D. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Прямые AI и BI пересекают биссектрису угла CDB в точках Q и P соответственно. Пусть M — середина отрезка PQ. Докажите, что прямая MI проходит через середину дуги ACB окружности ω.