Подготовка к региону 2

1. Дан параллелограмм $ABCD$ ($AB < BC$). Докажите, что окружности, описанные около треугольников APQ, для всевозможных точек P и Q, выбранных на сторонах BC и CD соответственно так, что $CP = CQ$, имеют общую точку, отличную от A.

2. Сумма чисел a_1, a_2, a_3, каждое из которых больше единицы, равна S, причем $\frac{a_i^2}{a_i-1} > S$ для любого $i = 1, 2, 3$. Докажите, что

$$\frac{1}{a_1+a_2} + \frac{1}{a_2+a_3} + \frac{1}{a_3+a_1} > 1.$$

3. Десять попарно различных ненулевых чисел таковы, что для любых двух из них либо сумма этих чисел, либо произведение — рациональное число. Докажите, что квадраты всех чисел рациональны.

4. Сколькими способами числа $2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{2005}$ можно разбить на два непустых множества A и B так, чтобы уравнение $x^2 - S(A)x + S(B) = 0$, где $S(M)$ — сумма чисел множества M, имело целый корень?

5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA' и BB'. На дуге ACB описанной окружности треугольника ABC выбрана точка D. Пусть прямые AA' и BD пересекаются в точке P, а прямые BB' — в точке Q. Докажите, что прямая $A'B'$ проходит через середину отрезка PQ.

6. В съезде участвуют представители 50 стран, по два человека от каждой. Все расселись за большим круглым столом. Докажите, что участников съезда можно так разбить на две группы, что в каждой будет по одному представителю каждой страны, и что каждый человек находится в группе не более чем с одним своим соседом.