

Подготовка к региону

1. Натуральное число A называется интересным, если оно делится на любое число, которое остается после зачеркивания в A нескольких последних цифр. Найдите наибольшее интересное число, состоящее из различных цифр.

2. По кругу стоят черные и белые точки (всего не менее 12 штук), так что у каждой точки среди 10 ее соседей (5 справа и 5 слева) поровну черных и белых. Докажите что общее число точек делится на 4.

3. На доске написаны 100 чисел из интервала $(0, 1)$. Разрешается выбрать два числа a и b и заменить их на два корня квадратного трехчлена $x^2 - ax + b$. (Если этот трехчлен имеет два корня.) Докажите, что этот процесс не может продолжаться бесконечно долго.

4. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O . Точки X и Y симметричны O относительно середины сторон BC и AD соответственно. Известно, что $AB = BC = CD$. Докажите, что точка пересечения серединных перпендикуляров к диагоналям четырехугольника лежит на прямой XY .

5. В роте 85 солдат. Каждый день старшина отправляет солдат в поле красить траву. Для этого он каждый день выбирает одного солдата и отправляет в поле его, а также либо всех тех, кто и выше, и старше выбранного, либо всех тех, кто и ниже, и младше выбранного. Докажите, что через 10 дней можно будет найти пару солдат, которые красили траву в одни и те же дни.

6. Пусть a_1 и a_2 — натуральные числа, b_1 — собственный делитель числа a_1 , b_2 — собственный делитель числа a_2 . Докажите, что $a_1b_1 + a_2b_2 - 1$ не делится на a_1a_2 .