Подготовка к региону. Теория чисел.

10-11 класс

13.01.18

1. Целые числа $a, x_1, x_2, \ldots, x_{13}$ таковы, что $a = (1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_{13}) = (1 - x_1)(1 - x_2)\ldots(1 - x_{13})$. Докажите, что $ax_1x_2\ldots x_{13} = 0$.

2. Даны различные натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{14}$. На доску выписаны все 196 чисел вида $a_k + a_l$, где $1 \le k, l \le 14$. Может ли оказаться, что для любой комбинации из двух цифр среди написанных на доске чисел найдется хотя бы одно число, оканчивающееся на эту комбинацию (то есть, найдутся числа, оканчивающиеся на 00, 01, 02,..., 99)?

3. Про три положительных числа известно, что если выбрать одно из них и прибавить к нему сумму квадратов двух других, то получится одна и та же сумма, независимо от выбранного числа. Верно ли, что все числа равны?

4. На доске написаны несколько чисел. Известно, что квадрат любого записанного числа больше произведения любых двух других записанных чисел. Какое наибольшее количество чисел может быть на доске?

5. Найдите все тройки простых чисел p, q, r такие, что четвёртая степень любого из них, уменьшенная на 1, делится на произведение двух остальных.

6. Изначально на доске записаны числа m и n. Каждую минуту Саша записывает в тетрадку квадрат наименьшего из чисел на доске, после чего Даша ищет разность чисел на доске и записывает ее вместо наибольшего из них, пока в какой-то момент не выпишет 0. Чему равна сумма чисел у Саши в тетради?

7. У Игоря есть 55 карточек: на одной написана цифра 1, на двух — цифра 2, ..., на девяти — цифра 9, на десяти — цифра 0. Можно ли из карточек выложить два числа: одно — 25-значное, другое — 30-значное, чтобы десятичная запись их произведения состояла из одних единиц?

8. Последовательность натуральных чисел a_n задана первым членом a_1 и правилом $a_{n+1} = a_n/2$, если a_n — чётное, $a_{n+1} = 3a_n + 1$, если a_n — нечётное. Докажите, что в этой последовательности встретится число, делящееся на 4.

9. На доске написали 100 попарно различных натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$. Затем под каждым числом a_i написали число b_i, полученное прибавлением к a_i наибольшего общего делителя остальных 99 исходных чисел. Какое наименьшее количество попарно различных чисел может быть среди $b_1, b_2, \ldots, b_{100}$?