Серия 4.

1. Целые числа $a, x_1, x_2, \ldots, x_{13}$ таковы, что

$$a = (1 + x_1)(1 + x_2) \ldots (1 + x_{13}) = (1 - x_1)(1 - x_2) \ldots (1 - x_{13}).$$

Докажите, что $a x_1 x_2 \ldots x_{13} = 0$.

2. На плоскости отметили все вершины правильного n–угольника, а также его центр. Затем нарисовали контур этого n–угольника, и центр соединили со всеми вершинами; в итоге n–угольник разбился на n треугольников. Вася записал в каждую отмеченную точку по числу (среди чисел могут быть равные). В каждый треугольник разбиения он записал в произвольном порядке три числа, стоящих в его вершинах; после этого он стер числа в отмеченных точках. При каких n по тройкам чисел, записанным в треугольниках, Петя всегда сможет восстановить число в каждой отмеченной точке?

3. Пусть AL — биссектриса треугольника ABC. Серединный перпендикуляр к отрезку AL пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точках P и Q. Докажите, что окружность, описанная около треугольника PLQ, касается стороны BC.

4. Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению $ab + bc + ca = 1$. Докажите, что

$$\sqrt{a + \frac{1}{a}} + \sqrt{b + \frac{1}{b}} + \sqrt{c + \frac{1}{c}} \geq 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}).$$

5. Коэффициенты a, b и c квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ — натуральные числа, сумма которых равна 2000. Паша может изменить любой коэффициент на 1, заплатив 1 рубль. Докажите, что он может получить квадратный трехчлен, имеющий хотя бы один целый корень, заплатив не более 1050 рублей.

6. Дано натуральное число $n > 2$. Рассмотрим все покраски клеток доски $n \times n$ в k цветов такие, что каждая клетка покрашена ровно в один цвет, и все k цветов встречаются. При каком наименьшем k в любой такой покраске найдутся четыре окрашенных в четыре разных цвета клетки, расположенные в пересечении двух строк и двух столбцов?