Основная теорема алгебры

Теорема. *Любой многочлен ненулевой степени над $\mathbb{C}$ имеет комплексный корень.*

Следствие. *Любой многочлен ненулевой степени над $\mathbb{C}$ может быть разложен на линейные множители.*

1. Докажите, что если z — комплексный корень многочлена над $\mathbb{R}$, то $\overline{z}$ — тоже корень этого многочлена.

2. Докажите, что всякий многочлен над $\mathbb{R}$ может быть разложен на множители, степень которых не превосходит двух.

3. Дан многочлен $f(x)$ с рациональными коэффициентами такой, что $f(\sqrt{2}) = 0$. Докажите, что $f(x)$ делится на $x^2 - 2$.

4. Разложите на неприводимые над $\mathbb{R}$ множители многочлены а) $x^5 - 1$; б) $x^6 - 1$.

5. Свободный член многочлен с целыми коэффициентами равен 2017, а остальные коэффициенты по модулю не превосходят 3. Докажите, что этот многочлен неприводим над $\mathbb{Z}$.

6. Натуральные числа m и n таковы, что $x^{2m} + x^m + 1$ делится на $x^{2n} - x^n + 1$. Докажите, что $x^{2m} + x^m + 1$ делится на $x^{2n} + x^n + 1$

7. Найдите 123–ю цифру после запятой в десятичной записи числа $(6 + \sqrt{35})^{2003}$.

8. Докажите, что для каждого многочлена $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ существует такой многочлен $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$, что $g(x^{2017})$ делится на $f(x)$.

9. Пусть простое число p имеет десятичную запись $\overline{p_n \ldots p_1 p_0}$. Докажите, что многочлен $p_n x^n + \ldots + p_1 x + p_0$ неприводим над $\mathbb{Q}$.

10. Все комплексные корни многочлена с целыми коэффициентами имеют модуль 1. Докажите, что каждый из них в некоторой степени равен единице.