

Применение инерсии

1. В угол вписаны две окружности. Третья окружность касается их обеих внешним образом (или обеих внутренним образом). Докажите, что прямая, проходящая через точки касания третьей окружности и первых двух, проходит через вершину угла.

2. Окружности ω_1 и ω_2 касаются внутренним образом окружности Ω в точках P и Q соответственно. Докажите, что точка пересечения общих внешних касательных к окружностям ω_1 и ω_2 лежит на прямой PQ .

3. Никакие три из четырех точек A, B, C, D не лежат на одной прямой. Докажите, что угол между описанными окружностями треугольников ABC и ABD равен углу между описанными окружностями треугольников ACD и $B CD$.

4. Две окружности пересекаются в точке A . К ним проведены две общие внешние касательные BC и DE . Докажите, что описанные окружности треугольников ABC и ADE касаются.

5. Дана окружность S и две точки A и B на ней. Проводятся всевозможные пары окружностей S_1 и S_2 , касающихся S в точках A и B и касающихся между собой. Найдите геометрическое место точек касания S_1 и S_2 .

6. Окружности 1 и 3 пересекаются с окружностями 2 и 4. Докажите, что если точки пересечения 1 с 2 и 3 с 4 лежат на одной обобщенной окружности, то точки пересечения 1 с 4 и 2 с 3 тоже лежат на одной обобщенной окружности (никакие три окружности не проходят через одну точку).

7. Через точки A и B проведены две окружности S_1 и S_2 , касающиеся окружности S . Также через A и B провели окружность S_3 , перпендикулярную S . Докажите, что S_3 образует равные углы с окружностями S_1 и S_2 .

8. Никакие три из четырех точек A, B, C, D не лежат на одной прямой. Докажите, что угол между описанными окружностями треугольников ABC и ABD равен углу между описанными окружностями треугольников ACD и $B CD$.

9. Прямая l , параллельная прямой BC , проходит через точку A . Окружность касается прямой l в точке A и вписанной окружности треугольника ABC внешним образом в точке A' . Точки B' и C' определяются аналогично. Докажите, что прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке.