Серия 1.

1. Сколькими различными способами можно расставить в таблице 3×3 числа $1, 2, \ldots, 9$ таким образом, чтобы все суммы чисел по строкам и столбцам были нечетными?

2. Пусть $f(x) = x^3 - x$, $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Докажите, что при любых действительных a и b, сумма которых не равна 0, многочлен $af(x) + bg(x)$ имеет три различных действительных корня.

3. Назовем натуральное число n квазисовершенным, если сумма всех его натуральных делителей (включая n) равна $2n - 1$. Кроме того, для каждого натурального n обозначим $s(n)$ сумму остатков от деления n на все натуральные числа, меньшие n. Докажите, что n квазисовершенно тогда и только тогда, когда $s(n) = s(n-1)$.

4. О вписанном четырехугольнике $ABCD$ известно, что $AB > CD$ и $BC > AD$. На сторонах AB и BC отмечены точки X и Y соответственно так, что $AX = CD$ и $AD = CY$. Пусть M — середина XY. Докажите, что угол AMC прямой.

5. В некотором графе степень каждой вершины не превосходит 1000. Докажите, что ребра графа можно так покрасить в 10 цветов, что не найдется нечетного одноцветного цикла.

6. Найдите все функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такие, что $f(m - n + f(n)) = f(m) + f(n)$ при всех $m, n \in \mathbb{N}$.