

Бернсайд помогает Ферма и Гауссу

Дан алфавит, состоящий из a букв. Имеется круглый вращающийся щит, по ободу которого записано несколько букв кодового сообщения.

1. Сколько сообщений можно составить, если на ободке должно быть p букв, где p простое число?

2. Выведите из результата предыдущей задачи *малую теорему Ферма*: Если число a не делится на простое число p , то

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

3. Сколько сообщений можно составить, если на ободке должно быть pq букв, где p и q — различные простые числа?

4. Сколько сообщений можно составить, если на ободке должно быть p^n букв? (По-прежнему p простое число.)

5. Сколько сообщений можно составить, если на ободке должно быть k букв?

6. Выведите из результата предыдущей задачи *тождество Гаусса*: Если d_1, d_2, \dots, d_m — все натуральные делители числа k (включая единицу и само k), то

$$\varphi(d_1) + \varphi(d_2) + \dots + \varphi(d_m) = k.$$