

Применение формулы Бернсайда

Формула Бернсайда. Пусть задана группа G преобразований множества M . Для преобразования $g \in G$ обозначим через $N(g)$ число его неподвижных точек. Тогда число орбит группы G равно

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} N(g).$$

1. Фирма Василия Петровича делает мозаичные окна. Каждое окно представляет из себя квадрат 4 на 4, в котором каждая клетка сделана либо из синего, либо из красного стекла. Сколько разновидностей изделий в ассортименте этой фирмы?

2. Наташа получила в подарок 10 бусинок — 5 белых, 2 красных и 3 голубых. Сколько различных ожерелий она может получить, используя все 10 бусинок? Ожерелья, совпадающие при повороте или перевороте, считаются одинаковыми.

3. На окружности отмечены 15 точек, делящие ее на равные дуги. Сколько существует различных (попарно неравных) шестиугольников с вершинами в отмеченных точках?

4. Дана таблица $n \times n$. Назовем *узором* раскраску ее клеток в два цвета. Разрешается выбрать любой столбец или строку и перекрасить все клетки выбранного ряда в противоположный цвет. Назовем узор А аналогичным узору Б, если Б можно получить из А такими перекрашиваниями. Докажите, что аналогичность является отношением эквивалентности. Вычислите число классов эквивалентности.

5. Сколькими способами можно покрасить в пять цветов вершины правильной треугольной призмы?

6. Сколькими различными способами можно раскрасить грани тетраэдра, если каждую можно красить любой из данных 4 красок?

7. Сколькими различными способами можно раскрасить вершины куба, если 4 из них должны быть черными, а 4 — белыми?