# Лемма Бернсайда

*Пусть задано множество $M$. **Преобразованием** множества $M$ называется взаимно однозначное отображение этого множества на себя.*

*Непустая совокупность $G$ преобразований множества $M$ называется **группой**, если вместе с каждыми двумя преобразованиями оно содержит их композицию, а также вместе с каждым преобразованием содержит обратное к нему.*

*Элемент $x \in M$ называется **неподвижной точкой** преобразования $g \in G$, если $g$ переводит $x$ в себя.*

***Орбитой** точки $x$ называется множество всех точек из $M$, в которые $x$ может быть переведена преобразованиями из $G$.*

*Множество всех преобразований из $G$, которые переводят элемент $x$ в себя, называется **стабилизатором** этого элемента и обозначается через $St(x)$.*

Докажите следующие утверждения:

**1.** Если каждое из двух преобразований из группы $G$ переводит элемент $x$ в элемент $y$, то в этой группе найдется такое преобразование, для которого $x$ является неподвижной точкой.

**2.** Если все преобразования из группы $G$, кроме тождественного, не имеют неподвижных точек, то длина каждой ее орбиты равна $|G|$.

**3.** Пусть точки $x$ и $y$ лежат в одной орбите группы $G$. Тогда преобразований из $G$, переводящих $x$ в $y$, столько же, сколько преобразований в стабилизаторе элемента $x$ (то есть $|St(x)|$).

**4.** Длина орбиты точки $x$ равна $|G|/|St(x)|$.

**5.** Порядки стабилизаторов у всех точек одной орбиты одинаковы.

**6.** Сумма порядков стабилизаторов всех точек одной орбиты равна $|G|$.

**7.** У каждого преобразования из группы $G$ найдем число неподвижных точек. Тогда сумма всех полученных чисел будет равна сумме порядков стабилизаторов всех точек множества $M$.

**8.** *Формула Бернсайда.* Для преобразования g из G обозначим через N(g) число его неподвижных точек. Тогда справедлива формула Бернсайда: число орбит группы G равно

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} N(g).$$