Лемма Холла

Лемма Холла. *В деревне живут n девушек и несколько юношей, некоторые из которых знакомы между собой. Известно, что любые k девушек ($1 \le k \le n$) знают в общей сложности по меньшей мере k юношей. Тогда всех девушек можно выдать замуж за знакомых им юношей.*

1. Квадратный лист бумаги разбит на сто многоугольников одинаковой площади с одной стороны и на сто других той же площади с обратной стороны. Докажите, что этот квадрат можно проткнуть ста иголками так, что каждый из двухсот многоугольников будет проткнут по разу.

2. Из шахматной доски вырезали 7 клеток. Докажите, что на оставшиеся клетки можно поставить 8 не бьющих друг друга ладей.

3. В двудольном графе степени всех вершин равны k. Докажите, что существует правильная раскраска ребер графа в k цветов.

4. В первых k строках квадратной таблицы $n \times n$ расставили натуральные числа от 1 до n так, что в каждой строке и в каждом столбце все числа разные. Докажите, что пустые строки можно заполнить числами от 1 до n так, чтобы данное свойство сохранялось. *Полученный квадрат называют магическим или латинским.*

5. Пусть $F = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ — набор конечных подмножеств множества E. Множество $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ различных элементов из E такое, что s_i принадлежит E_i при любом i, назовем трансверсалью. Докажите, что трансверсаль существует тогда и только тогда, когда объединение любых k подмножеств из набора F содержит не менее k элементов множества E (при любом натуральном k от 1 до n).

6. В деревне живут n девушек и несколько юношей. Известно, что любые k девушек ($d \le k \le n$) в совокупности знают по меньшей мере $k - d$ юношей. Докажите, что по меньшей мере $n - d$ девушек можно выдать замуж за знакомых им юношей.

7. Докажите, что из 51 натурального числа от 1 до 100 можно выбрать 6 чисел так, что любая пара будет отличаться в обоих разрядах.