Неравенство Коши для n чисел.

Неравенство Коши. Для неотрицательных $a_1, \ldots, a_n$ выполнено следующее неравенство: $\frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$.

1. Среди всех параллелепипедов с суммой измерений p найдите наибольший по объему.

2. Докажите, что из всех треугольников с данным периметром наибольшую площадь имеет равносторонний.

3. Для $a, b, c > 0$ докажите, что $(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geqslant 9a^2b^2c^2$.

4. $\sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{2}$, где $n = 2,3,4,\ldots$

5. Найдите положительное x, при котором выражение $5x^4 + \frac{4}{x^5}$ принимает наименьшее значение.

6. Для $a, b, c > 0$ $(1 + a)(1 + b)(1 + c) = 8$. Докажите, что $abc \leqslant 1$.

7. Докажите неравенство о средних. Для положительных чисел a_1, a_2 …, a_n выполнено следующее неравенство:

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \geqslant \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}},$$

8. Докажите, что для $a, b, c > 0$ $\frac{9}{a+b+c} \leqslant 2\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c}\right)$.

9. Докажите для положительных a_1, a_2, …, a_n, $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, что $\frac{S}{S-a_1} + \ldots + \frac{S}{S-a_n} \geqslant \frac{n^2}{n-1}$.

10. Решите систему:

$$\begin{cases} \sqrt{1+x_1} + \sqrt{1+x_2} + \ldots + \sqrt{1+x_{100}} = 100\sqrt{1+\frac{1}{100}}, \\ \sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + \ldots + \sqrt{1-x_{100}} = 100\sqrt{1-\frac{1}{100}}. \end{cases}$$

11. Докажите, что $na^k - ka^n \leqslant n - k$, где $n > k$, $n,k \in \mathbb{N}$, $a > 0$.

12. Докажите, что $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$ для положительных a, b, c.