

Неравенство Коши

Неравенство Коши. Для неотрицательных a_1, \dots, a_n выполнено следующее неравенство: $\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}$.

1. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ для любых $x, y > 0$.
2. Есть прямоугольник периметра 20. Какова его наибольшая возможная площадь?
3. $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ для любых x, y, z .
4. $(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8abc$ для любых $a, b, c \geq 0$.
5. $ab + bc + ca \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}$ для любых $a, b, c \geq 0$.
6. Докажите неравенство Коши для четырёх чисел: $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$ для любых $a, b, c, d \geq 0$. Для каких чисел можно аналогично доказать?
7. $x^4 + y^4 + 8 \geq 8xy$ для любых x, y .
8. $a/b + b/c + c/d + d/a \geq 4$ при $a, b, c, d > 0$.
9. $(a+b+c+d) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) \geq 16$ для положительных a, b, c, d .
10. $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a+b+c)$ для любых a, b, c .
11. Докажите, что $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{(x+y+z)^2}{3} \geq xy + yz + zx$.
12. $x^2 + y^2 + z^2 \geq z\sqrt{x^2 + y^2} + y\sqrt{x^2 + z^2}$ для любых x, y, z .
13. Докажите, что уравнение $5x^3 - 16x^2 + x + 32 = 0$ не имеет положительных корней.