

## Неравенство Коши

**Неравенство Коши.** Для неотрицательных  $a_1, \dots, a_n$  выполнено следующее неравенство:  $\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}$ .

1.  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$  для любых  $x, y > 0$ .
2. Есть прямоугольник периметра 20. Какова его наибольшая возможная площадь?
3.  $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$  для любых  $x, y, z$ .
4.  $(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8abc$  для любых  $a, b, c \geq 0$ .
5.  $ab + bc + ca \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}$  для любых  $a, b, c \geq 0$ .
6. Докажите неравенство Коши для четырёх чисел:  $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$  для любых  $a, b, c, d \geq 0$ . Для каких чисел можно аналогично доказать?
7.  $x^4 + y^4 + 8 \geq 8xy$  для любых  $x, y$ .
8.  $a/b + b/c + c/d + d/a \geq 4$  при  $a, b, c, d > 0$ .
9.  $(a+b+c+d) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) \geq 16$  для положительных  $a, b, c, d$ .
10.  $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a+b+c)$  для любых  $a, b, c$ .
11. Докажите, что  $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{(x+y+z)^2}{3} \geq xy + yz + zx$ .
12.  $x^2 + y^2 + z^2 \geq z\sqrt{x^2 + y^2} + y\sqrt{x^2 + z^2}$  для любых  $x, y, z$ .
13. Докажите, что уравнение  $5x^3 - 16x^2 + x + 32 = 0$  не имеет положительных корней.