Математический кружок, лицей 1568 • 9 класс • 26.09.2017

Чередование.

Идея 1. Если объекты двух видов стоят по кругу и чередуются, то объектов каждого вида **поровну**, а общее количество объектов — **четно**.

Идея 2. Если объекты двух видов стоят в ряд и чередуются, то количество объектов каждого вида отличается **не больше**, чем на 1.

1. Можно ли расставить 2017 чисел по кругу так, чтобы любое число было либо больше, либо меньше обоих своих соседей?

2. Вдоль круглого забора растут яблони, общее количество яблок на них равно 2016. Оказалось, что количество яблок на любых двух соседних деревьях отличается ровно на 1. Может ли количество яблонь равняться: (а) 17; (б) 18?

3. Катя и ее друзья встали по кругу. Оказалось, что оба соседа каждого ребенка — одного пола. Мальчиков среди Катиных друзей пятеро. А сколько девочек?

4. У куба отмечены вершины и центры граней, а также проведены диагонали всех граней. Можно ли по отрезкам этих диагоналей обойти все отмеченные точки, побывав в каждой из них ровно по одному разу?

5. Может ли прямая, не содержащая сторон 2017-угольника (возможно невыпуклого), пересекать все его стороны?

6. По кругу расставлено 9 чисел — 4 единицы и 5 нулей. Каждую секунду над числами проделывают следующую операцию: между соседними одинаковыми числами записывают единицу, а между соседними различными — нуль (т.е. записывается 9 новых чисел). После этого 9 старых чисел стираются. Могут ли после нескольких таких операций все числа стать одинаковыми?

7. Дети нарисовали поле для игры в классики (см. рисунок). Маша прыгнула в клетку 1, затем попрыгала по остальным клеткам (каждый прыжок — на соседнюю по стороне клетку) и выпрыгнула из клетки 10. Известно, что на клетке 1 Маша была 1 раз, на клетке 2 — 2 раза, ..., на клетке 9 — 9 раз. Сколько раз побывала Маша на клетке 10?

9	10
7	8
5	6
3	4
1	2

8. На шахматной доске в некоторых клетках находятся белая и черная фишки. За один ход можно передвинуть одну из фишек на соседнюю по стороне клетку, если она свободна. Можно ли (для какого-нибудь начального расположения) передвигать их таким образом, чтобы все возможные расположения фишек встретились ровно по одному разу?

9. Дан набор чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, каждое из которых равно 1 или -1. Известно, что $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + \cdots + a_na_1 = 0$. Докажите, что n делится на 4.

10. Дана клетчатая полоса $1 \times N$, $N > 1$. Двое девятиклассников играют на занятии в следующую игру. На очередном ходу первый игрок ставит в одну из свободных клеток крестик, а второй — нолик. Не разрешается ставить в соседние клетки два крестика или два нолика. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. После первого хода первого игрока Алексей Валерьевич увидел игру и вмешался: вместо второго игрока поставил нолик с краю полоски. У кого из игроков после этого есть выигрышная стратегия?

11. По кругу стоят n мальчиков и n девочек. Назовём пару из мальчика и девочки *хорошей*, если на одной из дуг между ними стоит поровну мальчиков и девочек (в частности, стоящие рядом мальчик и девочка образуют хорошую пару). Оказалось, что есть девочка, которая участвует ровно в 10 хороших парах. Докажите, что есть и мальчик, который участвует ровно в 10 хороших парах.