

Принцип крайнего.

Идея 1. В задачах, где надо что-то найти, нужным свойством часто обладает крайний (наибольший, наименьший, самый левый) объект.

Идея 2. В задачах на доказательство часто полезно начать рассуждение с рассмотрения крайнего объекта (или объектов).

1. Зайчиха купила для своих семерых зайчат семь барабанов разных размеров и семь пар палочек разной длины. Если зайчонок видит, что у него и барабан больше, и палочки длиннее, чем у кого-то из братьев, он начинает громко барабанить. Какое наибольшее число зайчат может начать барабанить?

2. Сколькими способами можно переставить числа от 1 до 100 так, чтобы соседние числа отличались не более, чем на 1?

3. В ряд выписаны несколько чисел (не все одинаковые), каждое равно среднему арифметическому своих соседей. Докажите, что наибольшее из чисел стоит крайним в этом ряду.

4. По окружности расставлено несколько натуральных чисел так, что каждое из них является делителем одного из соседних. Докажите, что среди этих чисел есть два одинаковых.

5. В стоугольнике провели несколько диагоналей так, что из каждой вершины выходит ровно три диагонали. Можно ли в его вершинах расставить натуральные числа от 1 до 100 так, что любые два соседних по стороне или диагонали отличаются меньше, чем на 5?

6. (а) На шахматной доске расставлено несколько слонов. Докажите, что есть слон, который бьет не более двух других.

(б) На шахматной доске расставлено несколько ладей. Докажите, что есть ладья, которая бьет не более двух других.

7. На окружности стоят 2017 чисел, каждое из которых равно модулю разности двух следующих за ним по часовой стрелке. Чему может равняться сумма всех этих чисел?

8. Гости за круглым столом ели изюм из корзины с 2013 изюминками. Оказалось, что каждый съел либо вдвое больше, либо на 6 меньше изюминок, чем его сосед справа. Докажите, что были съедены не все изюминки.

9. На конгресс собрались учёные, среди которых есть друзья. Оказалось, что каждые два из них, имеющие на конгрессе равное число друзей, не имеют общих друзей. Доказать, что найдётся учёный, который имеет ровно одного друга из числа участников конгресса.

10. На каждой из 15 планет, расстояния между которыми попарно различны, находится по астроному, который наблюдает ближайшую к нему планету. Докажите, что за какой-то планетой никто не наблюдает.