

Индукция-1.

1. Рассмотрим уголок. Он получается вырезанием из квадрата 2×2 одной клетки. Можно ли разрезать на такие уголки квадрат следующих размеров без одной клетки (вырезана может быть любая клетка квадрата, даже откуда-то из середины)
а) 4×4 б) 8×8 в) 128×128 г) $2^n \times 2^n$?
2. Вокруг города проходит кольцевая дорога с односторонним движением, и через город проходит несколько магистралей с односторонним движением. Докажите, что есть такой квартал (не разбитый магистралями на части), вокруг которого можно объехать, не нарушая правил.
3. На плоскости проведено несколько прямых. Докажите, что части, на которые эти прямые делят плоскость, можно раскрасить в два цвета так, чтобы любые две соседние части были окрашены в разные цвета.
4. а) Ханойские башни. Есть три стержня и несколько колец разного размера. Класть можно только кольцо меньшего размера на кольцо большего размера. Можно ли переместить пирамидку с одного стержня на другой, если в пирамидке n колец.
б) За какое наименьшее количество переключений можно переместить n колец?
5. На плоскости нарисовано несколько попарно пересекающихся окружностей (каждая окружность пересекается с любой другой). Доказать, что эту картинку можно обвести карандашом, то есть не проходя по одной дуге два раза и не отрывая карандаша от бумаги, и при этом вернуться в начальную точку.
6. В прямоугольнике $3 \times n$ расставлены фишки трех цветов по n каждого цвета. Докажите, что переставляя фишки в строчках, можно сделать так, чтобы в каждом столбце все три фишки стали разными.
7. Выпуклый многоугольник разрезан непересекающимися диагоналями на равнобедренные треугольники. Докажите, что в этом многоугольнике найдутся две равные стороны.
8. Вершины выпуклого многоугольника с нечетным числом сторон окрасили в три цвета так, что любые две соседние вершины окрашены в разные цвета. Докажите, что многоугольник можно разрезать непересекающимися диагоналями на треугольники так, чтобы у каждого треугольника цвета всех вершин были различны.
9. В нескольких местах кольцевой дороги стоят автомобили. Если весь бензин, имеющийся в их баках, слить в одну машину, то эта машина смогла бы проехать по всей кольцевой дороге до своего прежнего места. Докажите, что по меньшей мере одна из машин, стоящих на дороге, может объехать все кольцо, забирая по пути бензин у остальных машин.

Домашнее задание

Докажите с помощью индукции данные задачи

1. Из 3^n монет одна фальшивая, которая легче настоящей. Докажите, что за n взвешиваний можно найти фальшивую монету
2. В сумме $+1+3+9+27+81+243+\dots+729$ можно вычеркивать любые слагаемые и изменять некоторые знаки перед оставшимися числами с «+» на «-». Маша хочет таким способом сначала получить выражение, значение которого равно 1, затем, начав сначала, получить выражение, значение которого равно 2, затем (снова начав сначала) получить 3, и так далее. До какого наибольшего целого числа ей удастся это сделать без пропусков?