

Делимость-1.

Определение 1. Натуральное число больше 1 называется простым, если оно делится нацело только на единицу и само себя

Определение 2. Натуральное число называется составным, если оно делится нацело не только на единицу и само себя.

Определение 3. Числа называются взаимно простыми, если их наибольший общий делитель равен 1.

Основная теорема арифметики. Любое число больше 1 может быть разложено в произведение одного или больше простых множителей, причем это разложение единственно.

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

Утверждение. $\text{НОД}(a,b) \cdot \text{НОК}(a,b) = ab$.

1. Верны ли утверждения:

- если ни один из множителей не делится на некоторое число, то и произведение не делится на это число
- если число делится на два различных числа, то оно делится на их произведение
- если число делится на каждое из двух различных простых чисел, то оно делится на их произведение

2. Не вычисляя произведение $2016 \cdot 2013 \cdot 15 \cdot 77$ определите делится ли оно на 2, 3, 9, 10, 50, 55, 64, 80, 121, 143, 18117.

3. В банке 500 долларов. Разрешаются две операции: взять из банка 300 долларов или положить в него 198 долларов. Эти операции можно проводить много раз, при этом, однако, никаких денег, кроме тех, что первоначально лежат в банке, нет. Какую максимальную сумму можно извлечь из банка и как это сделать?

4. Про a, b известно, что ни одно из них не кончается на ноль, а произведение 10000. Какие значения может принимать их сумма?

5. Найдите

а) $\text{НОД}\left(\frac{11 \dots 1}{51}, \frac{11 \dots 1}{81}\right)$;

б) $\text{НОД}(99! + 100!, 101!)$

в) $\text{НОД}(2^{100} - 1, 2^{120} - 1)$;

6. Докажите, что числа $(2^m - 1)$ и $(2^n - 1)$ взаимно просты тогда и только тогда, когда m и n взаимно просты.

7. Сумма десяти натуральных чисел равна 1001. Какое наибольшее значение может принимать НОД (наибольший общий делитель) этих чисел?

8. Существуют ли 3 натуральных числа таких, что ни одно из них не делится на другое, а произведение любых двух из них делится на третье?

9. У составного числа a найдется такой простой делитель p , что $p^2 \leq a$.

10. На доске записаны двузначные числа. Каждое число составное, но любые два числа взаимно просты. Какое наибольшее количество чисел может быть записано?

11. Натуральное число назовём удивительным, если самый большой его собственный делитель (т.е. делитель, не равный 1 и самому числу) на 1 больше самого маленького собственного делителя. Найдите все удивительные числа.

12. Опишите все натуральные числа, у которых нечётное количество делителей.

Домашнее задание.

1. Существует ли n такое, что $n!$ оканчивается на пять нулей?

2. На прямой сидит блоха, и прыгает всякий раз либо на 15 сантиметров вправо, либо на 21 сантиметр влево. В каких точках прямой может побывать эта блоха?