Треугольник Паскаля

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
 & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & C_0^0 & & & & & & & & \\
 & & & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & & & & & \\
 & & & & C_2^0 & & C_2^0 & & C_2^2 & & & & & & \\
 & & & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & & & & & \\
 & & C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 & & & & \\
 & C_5^0 & & C_5^1 & & C_5^2 & & C_5^3 & & C_5^4 & & C_5^5 & & & \\
C_6^0 & & C_6^1 & & C_6^2 & & C_6^3 & & C_6^4 & & C_6^5 & & C_6^6 & & \\
C_7^0 & & C_7^1 & & C_7^2 & & C_7^3 & & C_7^4 & & C_7^5 & & C_7^6 & & C_7^7 \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & &
\end{array}
$$

1. Докажите, что $C_n^k = C_n^{n-k}$
   а) с помощью треугольника Паскаля
   б) комбинаторно
   в) алгебраически

2. Докажите, что $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$
   а) с помощью треугольника Паскаля
   б) комбинаторно
   в) алгебраически

3. Во сколько раз сумма чисел
   а) в четвертой строке больше, чем в третьей? А во сколько раз в восьмой строке больше, чем в седьмой?
   б) в n-ой строке больше, чем в $(n-1)$-ой?
   в) Чему равна сумма чисел n-ой строке треугольника Паскаля?

4. Докажите, что если перед числами в строчке n треугольника Паскаля поставить чередующиеся плюсы и минусы, то значение полученного выражения будет равно нулю.
   а) при нечетном n
   б) Используйте пункта а, чтобы доказать при четном n.

5. Встречается ли в треугольнике Паскаля число 2017?

6. Найдите натуральное число, большее единицы, которое встречается в треугольнике Паскаля
   а) больше трёх раз.
   б) больше четырёх раз.

7. Используя свойство треугольника Паскаля из задачи 2 докажите, что каждое число а в треугольнике Паскаля равно
   а) сумме чисел предыдущей левой диагонали, начиная с самого левого вплоть до стоящего слева над числом а.
   б) сумме чисел предыдущей правой диагонали, начиная с самого левого вплоть до стоящего справа над числом а.
   в) Докажите, что $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + ... + C_{k-1}^{k-1}$.
   г) Докажите, что $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-2}^{k-1} + ... + C_{n-k-1}^0$

8. Докажите, что число а равно количеству путей, ведущих из вершины треугольника Паскаля к месту, где стоит число а.(Мы можем двигаться только вниз от вершины, переходя х к одному двух из чисел на следующей строке, между которыми оно стоит.)

9. Докажите, что каждое число а в треугольнике Паскаля, уменьшенное на 1, равно сумме всех чисел, заполняющих параллелограмм, ограниченный теми правой и левой диагоналями, на пересечении которых стоит число а (сами эти диагонали в рассматриваемый параллелограмм не включаются).

Домашнее задание

1. Встречается ли в 100-й строке треугольника Паскаля число $1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99$?
2. Чему равна сумма $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n$?